4° $C_2 = \{e_1, e_2\}$ $F_2 = \{f_1(1,3), f_2(2,5)\}$

4.1 $Q_{F_2C_2}$ $\vec{V}_{C_2} = \underbrace{Q_{F_2C_2}}_{Q} \cdot \vec{V}_{F_2}$ (1)

Como $f_1 = \cancel{2}\, e_1 + 3e_2$
$f_2 = 2e_1 + 5e_2$ $\Rightarrow Q_{F_2C_2} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

4.2 ¿$Q = P^{-1}$? $P = P_{C_2F_2}$

Como $|Q| = -1 \neq 0$ existe Q^{-1} entonces simplemente operando en (1) $\Rightarrow \vec{V}_{C_2} = Q \cdot \vec{V}_{F_2} \Rightarrow Q^{-1}\vec{V}_{C_2} = Q^{-1} \cdot Q \cdot \vec{V}_{F_2}$
$\Rightarrow \vec{V}_{F_2} = Q^{-1}\vec{V}_{C_2} \Rightarrow \boxed{Q^{-1} = P}$ (*) Hallar $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Podemos también hacerlo poniendo los vectores e_1 y e_2 como combinación lineal de f_1 y f_2:

$e_1 = -5f_1 + 3f_2$
$e_2 = 2f_1 - f_2$ $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Lo comprobamos:
$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$Q \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 $T(x,y) = (2y, 3x-y) \Rightarrow T_{\{e_1,e_2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Hallamos $T(f_1)$ y $T(f_2)$ en la base $F_2 \Rightarrow T(f_1) = (6,0) = af_1 + bf_2$
$T(f_2) = (10,1) = cf_1 + df_2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow T(f_1) = -30f_1 + 18f_2$
$T(f_2) = -48f_1 + 29f_2$ $\Rightarrow T_{\{f_1,f_2\}} = T_{F_2} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$

Tenemos que $V'_{F_2} = T_{F_2} \vec{V}_{F_2}$

Si lo vemos en la base canónica C_2 $\Rightarrow$

$$V'_{C_2} = T_{C_2} \cdot \vec{V}_{C_2}$$

Aplicando el cambio de base:

$$Q\vec{V}'_{F_2} = T_{C_2} \cdot Q\vec{V}_{F_2} \Rightarrow \vec{V}'_{F_2} = Q^{-1} \cdot T_{C_2} Q \cdot V_{F_2} =$$

$$= \underbrace{P T_{C_2} \cdot Q}_{T_{F_2}} \vec{V}_{F_2}$$ con lo que queda demostrado.

Comprobemos con los datos:

$$P \cdot T_{C_2} Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ +3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & +7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix} = T_{F_2} \quad \#$$